ピンチされた4次元多様体の極小曲面の安定性(部分多様体の微分幾何学)

河合, 茂生

数理解析研究所講究録
489巻 1983年 46-53

ピンチされた4次元多様体の極小曲面の安定性

京大 理 河合茂生 (Shigeo Kawai)

本稿は, S. Kawai : On the instability of a minimal surface in a 4-manifold whose curvature lies in the interval $(\frac{1}{4}, 1]$, Publ. RIMS, Kyoto Univ. 18 (1982), 1067–1075 の解説である:

Mをcompact orientable manifoldで, あるRiemannian manifoldにminimalに immerse されたものとする。このときMが不安定であるとは, M上のnormal vector field uが存在して, u方向の第2変分が負となることである.

球面定理, 及び stable current と homology 群の関係から, Lawson と Simons は次のことを予想した。「complete simply-connected Riemannian manifold で, 断面曲率が $(\frac{1}{4}, 1]$ にふくまれるようなもののすべての minimal current は不安定である.」

これに対して Aminov はごく弱い形でではあるが、次のよ

うな肯定的結果を出した。

<u>定理</u> (Aminov). N を complete, simply-connected Riemannian manifold で断面曲率が $(\frac{1}{4}, 1]$ にふくまれるものとする。M を N に minimal に immerse された surface で、2次元球面に homeomorphic なものとすると、M は不安定である。

N が4次元のとき、この結果は次のように拡張されることを示すのが、目的である。

<u>定理.</u> N を4次元 orientable な Riemannian manifold でその断面曲率が $(\frac{1}{4}, 1]$ にふくまれるものとする。M を orientable な compact surface で N に minimal に immerse されているものとする。このとき、M の normal bundle の（いずれかの向きづけに対する）Euler 数が M の genus 以上であれば、M は不安定である。

<u>証明.</u> 2段階にわけて証明する。

① normal bundle の section $u \neq 0$ が存在して、ある微分方程式をみたせば、M は不安定となることを示す。

② その微分方程式をみたす section $u \neq 0$ の存在を示す。

<u>①の証明.</u> J を normal bundle ν の complex structure とし、∇ を ν の connection とする。

<u>命題</u> 1. $\nabla J = 0$.

R を ν の curvature として, ν の section u に対して M 上の function $S(u)$ を

$$S(u)(p) = \langle R(e, Ie)\, u(p),\ Ju(p) \rangle$$

で定義する. ただし, e は T_pM の unit vector, I は TM の complex structure である.

<u>命題</u> 2. ν の section u が

$$(*) \qquad J \circ \nabla u = \nabla u \circ I$$

をみたせば,

$$\langle \Delta u, u \rangle + S(u) = 0$$

をみたす. ただし, $\Delta = \nabla^* \circ \nabla = -\mathrm{tr}(\nabla\nabla u)$.

<u>証明</u>. e を T_pM の unit vector, E を p のまわりの local vector field で, $E(p) = e$, $(\nabla E)(p) = 0$ をみたすものとすると,

$$\begin{aligned} R(e, Ie)\, u &= \nabla_e \nabla_{IE} u - \nabla_{Ie} \nabla_E u \\ &= \nabla_e (J \nabla_E u) + \nabla_{Ie} \nabla_{IIE} u \\ &= J\, \nabla_e \nabla_E u + \nabla_{Ie} (J \nabla_{IE} u) \\ &= J (\nabla_e \nabla_E u + \nabla_{Ie} \nabla_{IE} u) \\ &= -J \Delta u. \end{aligned}$$

したがって,

$$\langle R(e, Ie)\, u, Ju \rangle = \langle -J \Delta u, Ju \rangle = -\langle \Delta u, u \rangle$$

となり，求める結果を得る．

注意．命題1．から，u が $(*)$ をみたせば，Ju も $(*)$ をみたす．

さて，$\overline{R}$ を N の curvature とし，ν の section u に対して，M 上の function $\overline{S}(u)$ を次の式で定義する．

$$\overline{S}(u)(p) = \langle \overline{R}(u(p), e)e, u(p)\rangle + \langle \overline{R}(u(p), Ie)Ie, u(p)\rangle,$$

ただし e は T_pM の unit vector である．

M の volume の，u 方向の第2変分 $\delta^2(u)$ は次のようにかける．

$$\delta^2(u) = \int_M \{\langle \Delta u, u\rangle - \overline{S}(u) - \|A^u\|^2\}\, dV.$$

ただし，A^u は u 方向の第2基本形式，dV は M の volume form である．

命題3．　N の断面曲率が $(\frac{1}{4}, 1]$ に含まれるとする．$u \not\equiv 0$ が $(*)$ の解ならば，

$$\delta^2(u) + \delta^2(Ju) < 0 .$$

証明．　$\delta^2(u) + \delta^2(Ju)$ の被積分関数は，

$$\langle \Delta u, u\rangle - \overline{S}(u) - \|A^u\|^2 + \langle \Delta(Ju), Ju\rangle - \overline{S}(Ju) - \|A^{Ju}\|^2$$

$$(**) \quad = \{\langle \Delta u, u\rangle + S(u) + \langle \Delta(Ju), Ju\rangle + S(Ju)\}$$
$$- \{S(u) + S(Ju) + \overline{S}(u) + \overline{S}(Ju) + \|A^u\|^2 + \|A^{Ju}\|^2\}$$

となるが，Ricci identity より．

$$S(u)(p) = \langle \overline{R}(e, Ie)\, u(p), Ju(p)\rangle$$

$$+\langle A^{Ju(p)}(e), A^{u(p)}(Ie)\rangle - \langle A^{u(p)}(e), A^{Ju(p)}(Ie)\rangle$$

となる。また，

$$\begin{aligned} S(Ju)(p) &= -\langle \bar{R}(e, Ie)Ju(p), u(p)\rangle \\ &\quad -\langle A^{u(p)}(e), A^{Ju(p)}(Ie)\rangle + \langle A^{Ju(p)}(e), A^{u(p)}(Ie)\rangle \\ &= S(u)(p). \end{aligned}$$

したがって，

$$\begin{aligned} &S(u)(p) + S(Ju)(p) \\ &= -2\langle \bar{R}(e, Ie)u(p), Ju(p)\rangle \\ &\quad + 2\langle A^{Ju(p)}(e), A^{u(p)}(Ie)\rangle - 2\langle A^{u(p)}(e), A^{Ju(p)}(Ie)\rangle. \end{aligned}$$

これから，(**) の第２項は次のようにかける．

$$\begin{aligned} &-\{2\langle \bar{R}(e, Ie)u, Ju\rangle + \bar{S}(u) + \bar{S}(Ju)\} \\ &-\{2\langle A^{Ju}(e), A^{u}(Ie)\rangle - 2\langle A^{u}(e), A^{Ju}(Ie)\rangle \\ &\quad + \|A^{u}\|^2 + \|A^{Ju}\|^2\}. \end{aligned}$$

N の断面曲率が $[a, 1]$ にふくまれるとき ($a>0$)，Berger の不等式により，

$$\begin{aligned} &2|\langle \bar{R}(e, Ie)u, Ju\rangle| - \bar{S}(u) - \bar{S}(Ju) \\ &\leqq \{2\cdot\frac{2}{3}(1-a) - 4a\}\|u(p)\|^2 \\ &= \frac{4}{3}(1-4a)\|u(p)\|^2 \end{aligned}$$

したがって，もし $a>\frac{1}{4}$ なら，これは $u(p)\neq 0$ なる点 p で負である．

また，

$$2\langle A^{J\varphi}(e), A^{\varphi}(Ie)\rangle - 2\langle A^{\varphi}(e), A^{J\varphi}(Ie)\rangle$$
$$+\|A^{\varphi}\|^2+\|A^{J\varphi}\|^2$$
$$=\|A^{J\varphi}(e)+A^{\varphi}(Ie)\|^2+\|A^{\varphi}(e)-A^{J\varphi}(Ie)\|^2$$
$$\geqq 0$$

であるから，$\delta^2(\varphi)+\delta^2(J\varphi)<0$ が示された。

②の証明.

補題. normal bundle ν は，ある holomorphic line bundle の構造をもち，(*) $J\circ\nabla\varphi=\nabla\varphi\circ I$ の解は，その holomorphic section と一致する.

もし，これが証明できたとすると，$\varphi\neq 0$ なる (*) の解の空間の次元は，Riemann Roch の定理を使ってしらべられる．$\chi(\nu)$ を ν の Euler 数，$g(M)$ を M の genus とするとき，

$$\dim H^0(M,\nu)-\dim H^1(M,\nu)=\chi(\nu)+1-g(M)$$

だから，

$$\dim H^0(M,\nu)\geqq\chi(\nu)+1-g(M).$$

したがって定理の証明は明らかである.

補題の証明. (*) $J\circ\nabla\varphi=\nabla\varphi\circ I$ の local solution を各点のまわりにつくって，それで bundle の frame をつくることを考える．$z=x+iy$ を $M\ni p$ のまわりの local coordinate とすると，

$$J\circ\nabla u = \nabla u\circ I \iff J\nabla_{\frac{\partial}{\partial x}}u = \nabla_{\frac{\partial}{\partial y}}u .$$

n, Jn と p のまわりの ν の orthonormal frame とし，

$$u = fn + gJn \quad (f, g \text{ は } \mathbb{R}\text{-valued function})$$

とすると，

$$(*) \iff \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial y} - g\langle\nabla_{\frac{\partial}{\partial y}}n, Jn\rangle = -\frac{\partial g}{\partial x} - f\langle\nabla_{\frac{\partial}{\partial x}}n, Jn\rangle \\ \frac{\partial f}{\partial x} - g\langle\nabla_{\frac{\partial}{\partial x}}n, Jn\rangle = \frac{\partial g}{\partial y} + f\langle\nabla_{\frac{\partial}{\partial y}}n, Jn\rangle . \end{cases}$$

ここで，$\alpha = \langle\nabla_{\frac{\partial}{\partial y}}n, Jn\rangle$，$\beta = -\langle\nabla_{\frac{\partial}{\partial x}}n, Jn\rangle$ とおけば，

$$(*) \iff \frac{\partial}{\partial \bar{z}}(f+ig) = \frac{1}{2}(\alpha+i\beta)(f+ig) .$$

ところが，方程式 $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}A = \frac{1}{2}(\alpha+i\beta)$ は local solution A をもつ．したがって $f+ig = \exp A$ とすると，これは $(*)$ の解であって non-zero である．よって，各点 p のまわりで，$(*)$ の解 u_p, Ju_p をつかって，次のような bundle chart がつくれる．

$$\begin{aligned} \varphi_p : U_p\times\mathbb{C} &\longrightarrow \pi^{-1}(U_p) \\ (z, a+ib) &\longmapsto a u_p(z) + b J u_p(z) , \end{aligned}$$

ただし，U_p は u_p の定義域，π は normal bundle ν の projection である．さて，$p\in U_p\cap U_q$ のとき，

$$u_q = m u_p + n J u_p \quad (m, n \text{ は } \mathbb{R}\text{-valued function})$$

とすると，u_p, u_q がともに $(*)$ の解であることから，

$$Xm - (IX)n = 0 ,$$

$$(IX)m + Xn = 0$$

がすべての $X \in T_pM$ に対して成りたつ，これは $\mathbb{C}$-valued function $m+in$ が $U_p \cap U_q$ 上 holomorphic であることを示す．ところが，transition function $g_{qp} = \varphi_q \circ \varphi_p^{-1}$ は

$$g_{qp}(z) = \{(m+in)(z)\}^{-1}$$

だから，$\{\varphi_p\}_{p \in M}$ によって ν は holomorphic line bundle の構造をもつ．

この構造に関する holomorphic section が (*) の解と一致することは定義からわかる．故に補題が示された．

定理の系として次のようなことがわかる．

系1． M が2次元球面と homeomorphic $\Rightarrow$ M は不安定．

これは Aminov の結果の $\dim N=4$ の場合である．

系2． M が2次元 torus と homeomorphic で normal bundle が trivial でない． $\Rightarrow$ M は不安定．

文　献

1． Aminov : Math. USSR Sbornik 29, 359−375 (1976).

2． Lawson, Simons : Ann. of Math. 98, 427−450 (1973).